rima.guidara@gmail.com

Théorie et Traitement du Signal

1ère Année Ingénieur: GT-GEC

Groupe Pédagogique en Traitement du Signal

Année Universitaire : 2019-2020

Ecole Nationale d'Electronique et de Télécommunication de Sfax

1

Introduction Générale

- Groupe pédagogique en traitement du signal
  - Med Ali Ben Ayed
  - Rima Guidara
  - Mondher Frikha
  - Imen Kallel
- Charge horaire:
  - Cours: 21h
  - TD: 10h30mn
  - TP: 9h

2

Scanned by CamScanner

Introduction Générale

- Sommaire:
  - Chapitre 1: Introduction à la théorie du Signal
  - Chapitre 2: Analyse temporelle des Signaux Déterministes
  - Chapitre 3: Analyse spectrale des Signaux déterministes
  - Chapitre 4: Spectres d'Energie et de Puissance
  - Chapitre 5: Numérisation des Signaux

3

Cours Théorie et Traitement du Signal

1ère année ingénieur
GT-GEC

Chapitre I :
Introduction à la théorie du signal

Année Universitaire : 2019-2020
Ecole Nationale d'Electronique et de Télécommunication de Sfax

4

Scanned by CamScanner

Plan du chapitre

I-Définitions

II- Classifications des signaux :

- Classification dimensionnelle
- Classification phénoménologique
- Classification morphologique
- Classification énergétique
- Classification spectrale
- Autres propriétés des signaux

III- Opérations élémentaires sur les signaux

IV- Fonctions usuelles pour le traitement du signal.

5

Définitions

- Signal : c'est la représentation physique de l'information transmise d'une source vers un destinataire. Le mot signal vient du latin *signum* qui dénote une entité d'information.
- La nature physique d'un signal peut être très variable.
- Exemples :

- Signaux électriques (tension, courant)
- Signaux biomédicaux (ECG, EEG, EMG…)
- Signaux acoustique (parole, musique, bruit acoustique)
- Vibration sismique
- Signaux radar et signaux télécoms
- Images
- Vidéos, etc…

6

Scanned by CamScanner

Définitions

- **Bruit (noise)** : tout phénomène perturbateur indésirable gênant la perception ou l'interprétation d'un signal.
- **Rapport signal à Bruit (RSB ou SNR)** : mesure du degré de contamination du signal par le bruit. Il s'exprime sous la forme d'un rapport des puissances respectives du signal P_s et du bruit P_n :

$$\mathcal{E} = \frac{P_s}{P_n}$$

- Le SNR est souvent indiqué selon une échelle logarithmique mesurée en décibels :

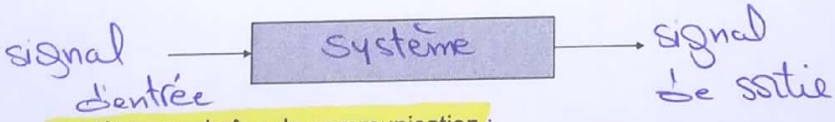
$$SNR = \mathcal{E}_{db} = 10 \log_{10}(\mathcal{E})$$

→ Plus le SNR est faible, plus il est difficile d'extraire le signal utile du bruit (signal noyé dans le bruit…)

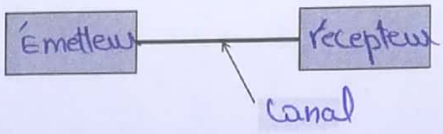
7

Définitions :

- **Système** : tout dispositif qui permet de transformer un signal



- **système ou chaîne de communication** :



- **Émetteur** : Source d'information donnant naissance à un signal.
- **Récepteur** : Destinataire d'information ou de signal.
- **canal** : Milieu de transmission d'un signal (souvent pollué par du bruit)

8

Scanned by CamScanner

Définitions :

- Mesures d'un signal : représentent l'évolution d'un signal physiquement réalisable. Elles vérifie les propriétés suivantes :
  - Amplitude finie
  - Durée limitée dans le temps (support temporelle borné)
  - Energie finie
- Modèle d'un signal : modèle mathématique qui peut être non réalisable physiquement.
  Exemple : fonction $A\sin(2\pi f_0 t)$ définie pour tout t.

Intérêt : associer un modèle mathématique (théorique) à un signal physique facilite le traitement.

11

Classification des signaux :

- Classification dimensionnelle
- Classification phénoménologique
- Classification morphologique
- Classification énergétique
- Classification spectrale
- Autres propriétés

12

Scanned by CamScanner

Définitions :

- Théorie du signal : ensemble des outils mathématiques qui permettent de décrire un signal.
- Traitement du signal : ensemble des techniques permettant d'élaborer, d'interpréter et de transformer des signaux.
- Fonctions du traitement du signal :

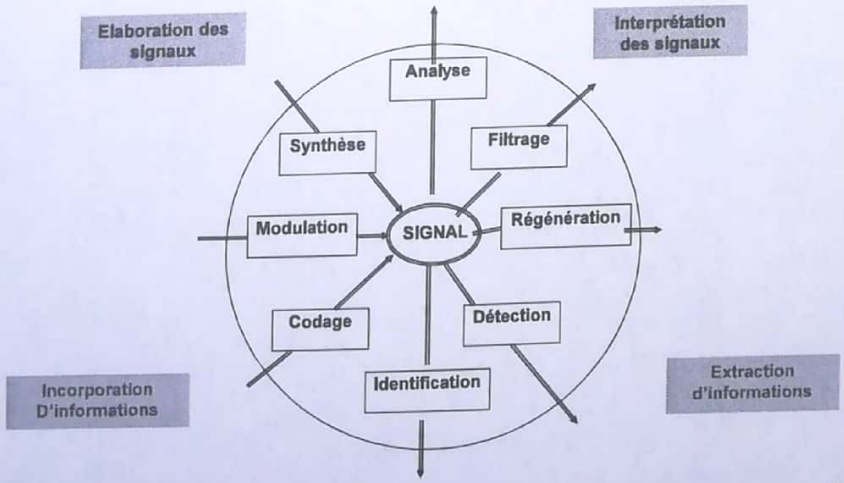
le traitement du signal assure deux fonctions principales :

- L'incorporation d'inf... : elle correspond à l'élaboration de signaux par des traitements comme la synthèse, la modulation, le changement de fréquence ou le codage de signaux.

- L'extraction d'information obtenue par l'interprétation des signaux disponibles. Ceci comprend des traitements comme l'analyse, le filtrage, la mesure, la détection, etc

9

Principales fonctions du traitement de signal



10

Scanned by CamScanner

Classification Dimensionnelle :

Un signal est une fonction d'une ou plusieurs variables :

- signal unidimensionnel : fonction d'une seule variable (par exemple une fonction du temps x(t))
  Exemples : - signal de parole, signaux électriques, représentation d'un spectre d'émission d'une étoile, etc…
- bidimensionnel 2 variables
  Exemples : images I(x,y)
- multidimensionnel fonction de plusieurs variables.
  Exemples : vision 3D, vidéos, enregistrement multicanaux, etc…

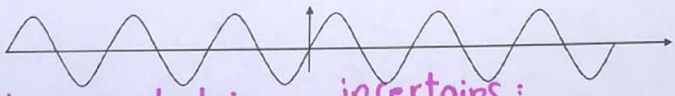
→ Dans ce cours, nous considérons essentiellement des signaux unidimensionnels fonction du temps.

13

Classification phénoménologique

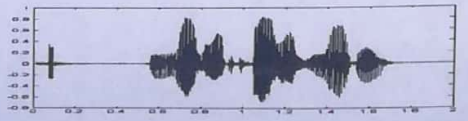
- Les signaux déterministes ou certains : évolution décrite par un modèle mathématique.

Exemple : signal sinusoïdal d'électricité $(x(t) = A\sin(2\pi f_0 t))$



- Les signaux aléatoires ou incertains : comportement imprévisible, décrits uniquement par des modèles statistiques

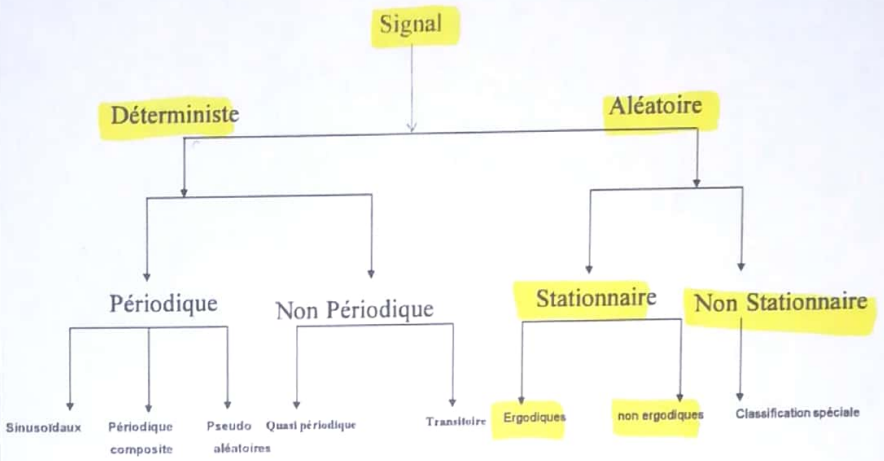
Exemple : enregistrement d'un signal de parole



14

Scanned by CamScanner

Classification phénoménologique

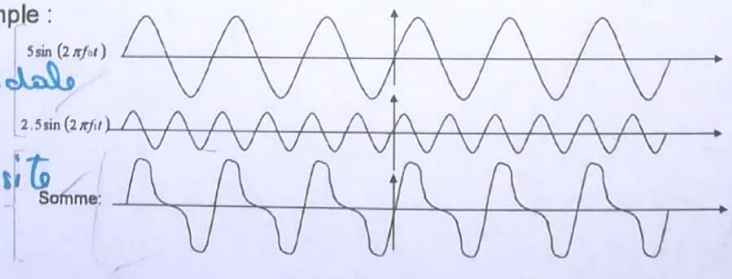


15

Classification phénoménologique

- Signaux déterministes :
  - périodique : qui se répète au bout d'une durée *T*, appelée ...période

Exemple :



- sinusoïdale
- composite

- Pseudo-aléatoire : signal périodique avec un comportement aléatoire à l'intérieur de la période.

16

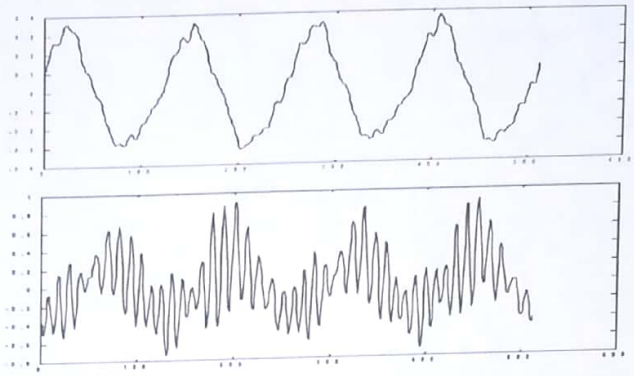
Scanned by CamScanner

Classification phénoménologique

Signaux déterministes :

- Quasi-périodique: signal résultant de la somme de signaux périodiques avec un rapport de périodes non rationnel.

Exemple : vibration d'une machine tournante



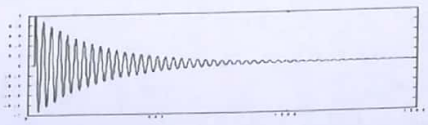
17

Classification phénoménologique

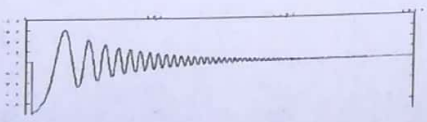
Signaux déterministes :

- transitoire: éphémères (momentané: qui dure peu de temps)

Réponse d'un système linéaire à une impulsion



Réponse d'un système non-linéaire à une impulsion



18

Scanned by CamScanner

Classification phénoménologique

- Valeurs caractéristiques d'un signal déterministe :

Supposant que le signal $x(t)$ est défini sur $[t_1, t_2]$

Moyenne (Average): $x = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, dt$

Valeur Quadratique Moyenne (AverageMeanSquare) = $\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt$

valeur efficace (Root Mean Square):

$$x_{eff} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt}$$

19

Classification Morphologique

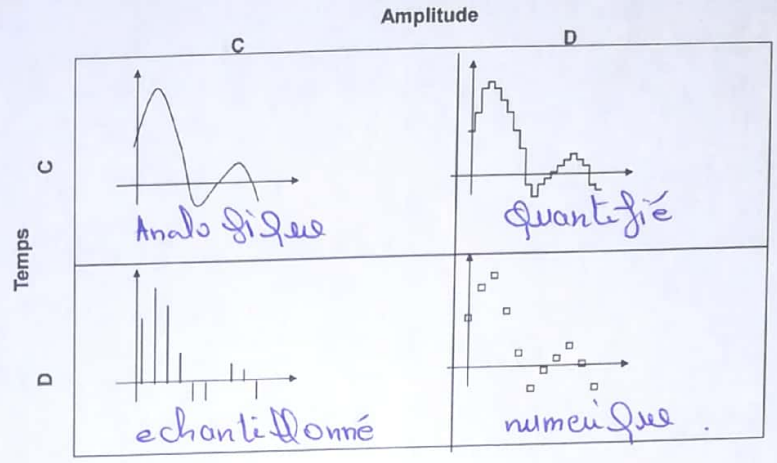
Un signal peut se présenter sous différentes formes selon que son amplitude est une variable continue ou discrète et que la variable libre temps, elle même continue ou discrète. On distingue donc ainsi quatre types de signaux.

AMPLITUDE	TEMPS	TYPES
Continue	Continue	analogique
Discrète	Continue	quantifié
Continue	Discrète	echantillonné
Discrète	Discrète	numérique

20

Scanned by CamScanner

Classification Morphologique



Remarque: généralement, les systèmes de traitement de signal suivent la nature des signaux sur les quels ils opèrent.

21

Classification Énergétique

Définitions :

- Energie Totale d'un signal : définie par l'équation

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

- Puissance Moyenne d'un signal : définie par l'équation

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt$$

- Puissance Moyenne d'un signal périodique : définie sur une période T

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{T} |x(t)|^2 \, dt$$

22

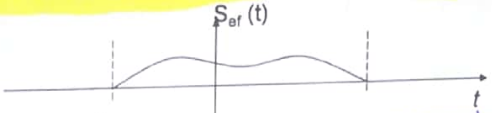
Scanned by CamScanner

Classification Énergétique

- Signaux à énergie finie : dont l'énergie totale W_x a une valeur finie.

→ La puissance moyenne d'un signal à energie finie est nulle.

Exemple : tous les signaux d'amplitude finie et à support borné.



- Les signaux physiquement realisables sont des signaux à energie finie

- Signaux à puissance moyenne finie : dont la puissance moyenne P_x est finie non nulle.

Remarque : un signal periodique est signal à puissance moyenne finie

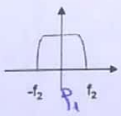
23

Classification Spectrale

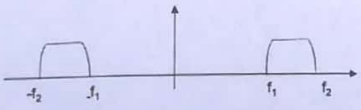
Définition:

- La classification spectrale est basée sur la distribution D(f) de son énergie ou de sa puissance en fonction de la fréquence (spectre).

- La largeur de bande B d'un signal est le domaine principal des fréquences occupé par son spectre, définie par $B = f_2 - f_1$



signal de basse frequence avec $f_1 \to 0$.



signal à haute frequence.

24

Scanned by CamScanner

* signaux à energie finie

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = c \text{ finie}$$

$$P = \lim_{T \to +\infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt.$$

$$= 0$$

* signaux à puissance moyenne finie

P finie non nulle (E infini)

périodique $\Longrightarrow$ PNF

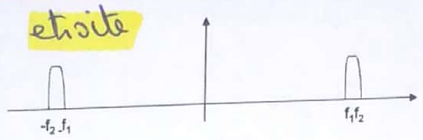
$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt$$

* PN finie

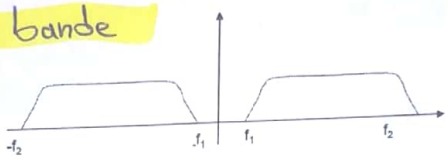
Scanned by CamScanner

Classification Spectrale

- signale à bande étroite : f_1 et f_2 sont assez proches



- signal à large bande : $f_2 >> f_1$



25

Autres propriétés des signaux

- Causalité : $x(t) = 0$ pour tout $t < 0$.
  - Signal causal : $x(t) = 0$ pour tout $t > 0$.
  - Signal anti-causal : signal est dit non causal dans le autre cas.
  - Signal non-causal: le signal est dit non-causal dans les autres cas.

- Signal à support borné : si $x(t) = 0$ pour tout $|t| > t_0$ avec t_0 constante

- Parité et symétrie :
  - Signal réel pair : il vérifie $x(t) = x(t)$...Graphiquement, il est symétrique par rapport à ...l'axe des ordonnées.
  - Signal réel impair : il vérifie $x(-t) = -x(t)$.. Graphiquement, il est symétrique par rapport à ....l'origine...

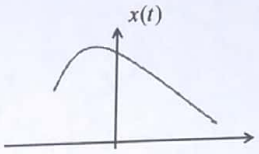
  - Signal complexe de conjugué symétrique : il vérifie ...$x(-t) = x^*(t)$
  - Signal complexe de conjugué antisymétrique : il vérifie $x(-t) = -x(t)$

26

Scanned by CamScanner

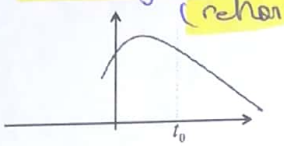
Opérations élémentaires sur les signaux

- Décalage Temporel :



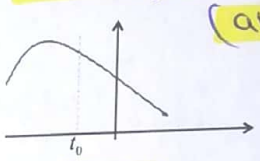
$x(t-t_0)$

décalage à droite (retard)



$t_0 > 0$

décalage à gauche (avance)

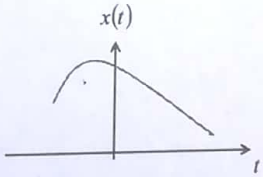


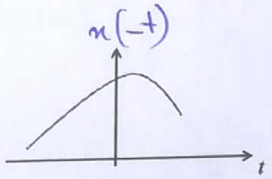
$t_0 < 0$.

27

Opérations élémentaires sur les signaux

- Inversion Temporelle : $x(-t)$

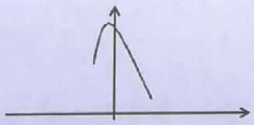




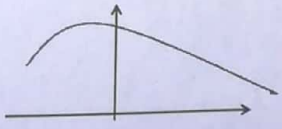
Inversion temporelle = ..symétrie du signal / l'axe des ordonnées.....

- Changement d'échelle : $x(at)$

Compression $a > 1$



Dilatation $a < 1$

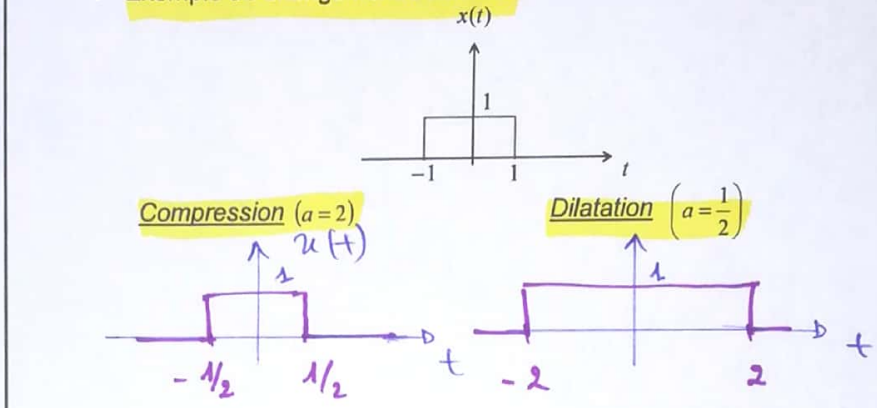


28

Scanned by CamScanner

Opérations élémentaires sur les signaux

- Exemple de changement d'échelle :



1/2

29

Opérations élémentaires sur les signaux

- Produit scalaire:

Si $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux réels ou complexes définis sur un intervalle $[t_1,t_2]$ et de carrés sommables, alors leur produit scalaire est défini par

$$\langle x(t).y(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, y(t)\, dt .$$

Remarque : le produit scalaire vérifie la symétrie hermitienne

$$\langle x(t).y(t) \rangle = \langle y(t).x(t) \rangle .$$

- Norme :

La norme L^2 d'un signal $x(t)$ de carré sommable sur $[t_1,t_2]$ est définie par

$$\|x(t)\|^2 = \langle x(t).x(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t).x^*(t)\, dt$$

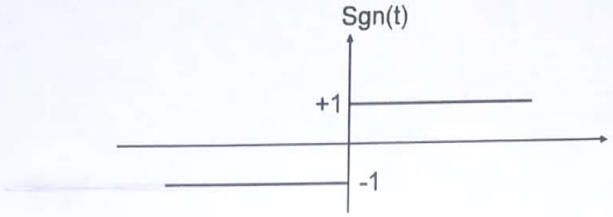
$$= \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt = W$$

30

Scanned by CamScanner

Fonctions usuelles pour le TS

- Signe :



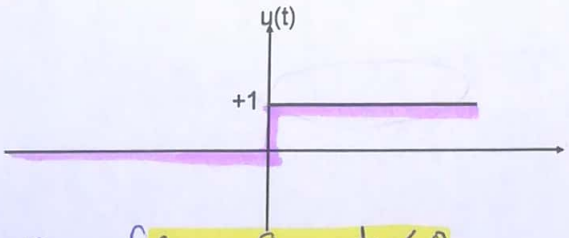
Par convention, on choisit Sgn(0)=0 → signal impair

$$sgn(t) = \frac{t}{|t|} = \begin{cases} -1 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

31

Fonctions usuelles pour le TS

- Echelon : (ou fonction de Heaviside)



$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}.$$

Exercice : exprimer sgn(t) en fonction du signal u(t).

$* \quad u(t) - u(-t) = sgn(t)$ ✓

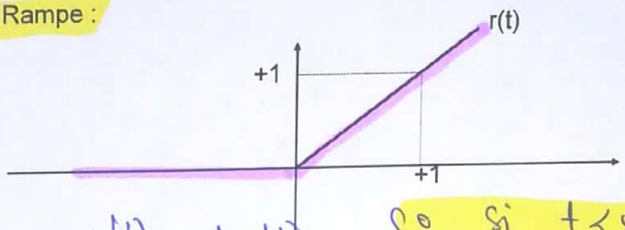
$sgn(t) = 2u(t) - 1$

32

Scanned by CamScanner

Fonctions usuelles pour le TS

- Rampe :



$r(t) = t\,u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

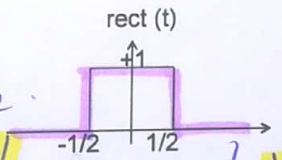
- Propriété:

$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(t)dt$

33

Fonctions usuelles pour le TS

- Rectangle :



$\text{rect}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > 1/2 \\ 1 & \text{si } |t| < 1/2 \end{cases}$

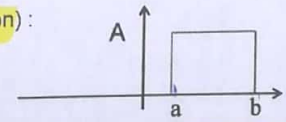
A rect

centre $\left(t - \frac{b+a}{2} \right)$

$b - a$.

par deux.

- Décalage temporel (ou translation) :



→ Le produit d'un signal par une fonction rectangle permet d'obtenir un signal à support borné dans le temps.

Propriété : $\text{rect}(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$

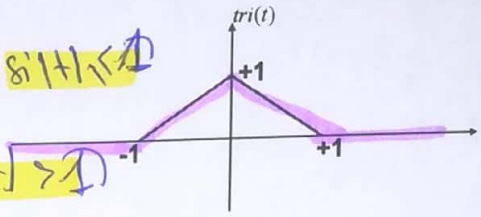
34

Scanned by CamScanner

Fonctions usuelles pour le TS

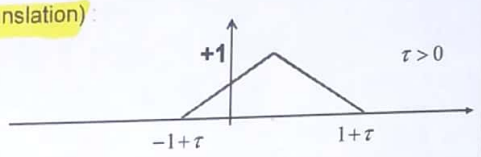
- Triangle :

$$tri\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & \text{si } |t| < T \\ 0 & \text{si } |t| > T \end{cases}$$



demi largeur du triangle

- Décalage temporel (ou translation)



A $\left|\frac{t - \text{Centre}}{\text{demi largeur}}\right|$

- Exemple : Un triangle centré en 3 et de largeur 6 avec une amplitude 2 est noté par:

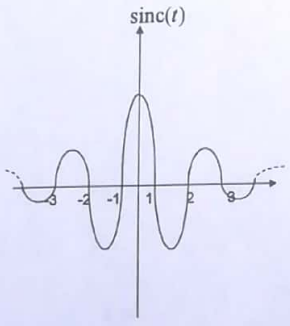
$$2\,tri\left(\frac{t-3}{3}\right)$$

35

Fonctions usuelles pour le TS

- Sinus Cardinal :

$$sinc(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$



Propriétés:

- $sinc(t) \neq 0$ si $t \in \mathbb{Z}^*$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(t)\,dt = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} |sinc(t)|^2\,dt = 1$

36

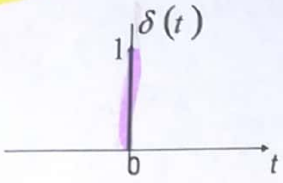
Scanned by CamScanner

Fonctions usuelles pour le TS

- Impulsion ou distribution de Dirac : notée $\delta(t)$ et définie par :

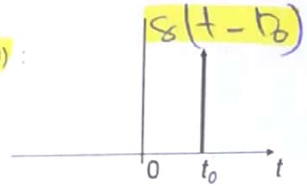
$\delta(t) = 0$ si $t \neq 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = A$



→ L'impulsion de Dirac en continu est représentée par une flèche en *t=0*. L'amplitude à l'origine est infinie (*1* indique l'aire de l'impulsion)

➢ Décalage temporel de t_0 ($t_0 > 0$) :



37

Fonctions usuelles pour le TS

- Liens entre impulsion de Dirac et fonctions élémentaires:
  - Lien avec la fonction échelon :

$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 1 & \text{si } t>0 \end{cases} \Longrightarrow \delta(t) = \frac{d\,u(t)}{dt}$

  - Lien avec la fonction rectangle :

- L'impulsion de Dirac peut être définie comme la limite d'une impulsion rectangulaire d'amplitude 1/*A* et de durée *A*, lorsque *A* tend vers 0. L'aire de cette impulsion est constant et égal à *1*.

$\delta(t) = \lim_{A \to 0} 1/A \; rect(t/A)$.

- Dérivée d'une fonction rectangle:

$rect(t) = u\left(t+\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow \frac{d(rect(t))}{dt} = \delta(t+1/2) - \delta(t-1/2)$

38

Scanned by CamScanner

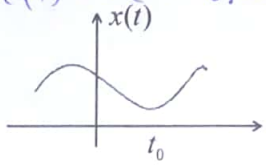
Fonctions usuelles pour le TS

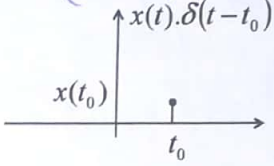
- Propriétés d'une impulsion de Dirac :
- Produit d'un signal par une impulsion :

Soit x(t) un signal continu en 0 ou t_0, alors :

$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t)$: prélève l'échantillon de x(t) en 0

$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0)\, \delta(t - t_0)$ prélève l'échantillon de x(t) en t_0.



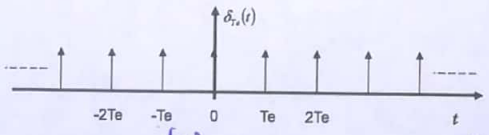


- Intégration : $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \delta(t - t_0)\, dt = x(t_0)$

39

Fonctions usuelles pour le TS

- Suite périodique d'impulsion de Dirac (Peigne de Dirac) :



$$\delta_{Te}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kTe)$$

- Produit d'un signal par un peigne de Dirac : signal échantillonné

$$x_e(t) = x(t) \cdot \delta_{Te}(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kTe)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kTe) \cdot \delta(t - kTe)$$

40

Scanned by CamScanner

Théorie et Traitement du Signal

1ère année ingénieur
GRT-GEC

Chapitre II :

Analyse Temporelle des Signaux Déterministes et Systèmes Continus

Année Universitaire : 2019-2020
École Nationale d'Électronique et de Télécommunications de Sfax

Plan du chapitre

I- Analyse temporelle

- Espace des signaux à énergie finie
- Produit scalaire
- Notions de corrélations

II-Systèmes Continus

- Classification des Systèmes Continus
- Convolution

Scanned by CamScanner

Analyse temporelle

- **Distance Euclidienne entre deux signaux :**

  Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux d'énergie finie. La distance euclidienne entre ces deux signaux sur un intervalle $[t_1, t_2]$, est définie par:

$$d_2(x(t), y(t)) = \sqrt{K \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - y(t)|^2 dt}$$

  K est une constante de normalisation (en général=1).

- **Remarque :**

  La distance $d_2(x(t), y(t))$ est une mesure de dissemblance entre les signaux, elle est donc nulle pour des signaux identiques.

$$d_2(x(t), x(t)) = 0$$

Analyse temporelle

- **Espace des signaux à énergie finie:**

  L'ensemble des signaux à énergie finie sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ forme un espace fonctionnel noté $L_2(t_1, t_2)$ muni de la norme:

$$\|x(t)\| = d_2(x(t), 0) = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt}$$

$$= \sqrt{W_x(t_1, t_2)}$$

Scanned by CamScanner

Analyse temporelle

- **Valeur échantillonnée:**

$$x(t_0) = \langle x, \delta_{t_0} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \delta(t - t_0)\, dt$$

- **Produit scalaire (évalué sur l'intervalle T):**

$$\langle x, y \rangle = \int_T x(t) \cdot y^*(t)\, dt$$

On dit que $x(t)$ et $y(t)$ sont **orthogonaux** sur l'intervalle T s'ils vérifient:

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Intercorrélation

- **Intercorrélation *(corrélation croisée ou mutuelle)***

Si on considère que le produit scalaire de deux signaux $x(t)$, $y(t)$ est **une mesure de similitude de forme et de position**, alors la fonction d'intercorrélation traduit **l'évolution de cette similitude en fonction du paramètre de translation** pour les signaux à énergie finie réels ou complexes:

$$C_{xy}(\tau) = \langle x, y_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t - \tau)\, dt$$

Où y_τ dénote la fonction décalée, $y(t-\tau)$, de $y(t)$

Pour un signal **d'énergie infinie**, on prendra

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, y^*(t - \tau)\, dt$$

- **Propriétés:**

$$C_{xy}(-\tau) = C^*_{yx}(\tau)$$ Symétrie Hermitienne

Pour les signaux réels

Scanned by CamScanner

Autocorrélation

- **Fonction d'autocorrélation**

Comparaison entre un signal et ses copies retardées: Indicateur de la déformation d'un signal au cours du temps.

Fonction d'autocorrélation d'un signal à énergie finie:

$$C_{xx}(\tau) = \langle x, x_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\, dt = C_x(\tau)$$

L'autocorrélation possède la dimension d'une puissance et:

$$C_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \|x(t)\|^2 = W_x$$

La valeur à l'origine $\tau=0$ de la fonction d'autocorrélation est égale à l'énergie totale du signal.

Autocorrélation: Propriétés

- L'autocorrélation satisfait toujours:

$$C_x(0) \geq |C_x(\tau)|$$

- Pour **un signal aléatoire**, elle **tend vers 0 pour τ grand**
- Et c'est une fonction ..... paire .....:

$$C_x(\tau) = C_x(-\tau)$$

- **Orthogonalité** ou **décorrélation** des signaux $x(t)$ et $y(t)$:

$$C_{xy}(\tau) = 0$$

Scanned by CamScanner

Autocorrélation: Energie infini

- Que faire avec un signal dont l'énergie diverge (par exemple signal périodique) ?

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \infty$$

Dans ce cas, l'autocorrélation ne peut plus être estimée pour toute valeur de τ car l'intégrale ci-dessous diverge

$$C_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$

Dorénavant, et sauf mention particulière, nous utiliserons l'**autocorrélation moyenne:**

$$C_x(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$

Remarque : Pour un signal périodique de période T, la fonction d'autocorrélation est périodique de même période T

Corrélation: Normalisation

- Dans la pratique, **on normalise** toujours les auto/ intercorrélations pour avoir des valeurs bornées entre 0 et 1.
  - Pour l'autocorrélation, comme nous avons:

$$|C_x(\tau)| \leq C_x(0)$$

pour avoir: $0 \leq C_x(\tau) \leq 1$.

$$C_x(\tau) \longrightarrow C_x(\tau) / C_x(0)$$

  - Pour l'intercorrélation, l'inégalité de Schwartz implique:

$$|C_{xy}(\tau)|^2 \leq C_x(0) C_y(0)$$

$$C_{xy}(\tau) \rightarrow \frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{C_x(0) C_y(0)}} \quad \rightarrow \quad 0 \leq |C_{xy}(\tau)| \leq 1$$

Scanned by CamScanner

Réponse Impulsionnelle d'un Système à Temps Continu

Pour les systèmes à temps continus (STC), on adopte la notation suivante: $x(t) \rightarrow y(t)$, $x(t)$ et $y(t)$ désigne respectivement l'entrée et la sortie du SC.

La Réponse Impulsionnelle (RI) d'un système continu $h(t)$:



$\delta(t) \rightarrow h(t)$ *et on dit que l'entrée* $\delta(t)$ produit la sortie $h(t)$

Classification des Systèmes Continus

Nous classifions les systèmes continus (SC) en **6 catégories**:

- Linéaires ou non linéaires.
- Invariants ou variantes dans le temps
- Avec ou sans mémoires.
- Causaux ou non causaux.
- Stables ou instables.
- Inversibles ou non inversibles.
- Autres propriétés de SC.

Scanned by CamScanner

Linéarité des Systèmes Continus

Un système à temps continu est linéaire s'il satisfait les 2 propriétés:

- **Additivité:** si $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ et $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$ alors:

$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$

- **Homogénéité:** $a x_1(t) \rightarrow a y_1(t)$

Nous pouvons combiner ces 2 propriétés ci-dessus pour stipuler la propriété de la linéarité d'un SC ainsi:

- SC linéaire ssi:

$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$



si on trouve la même sortie => SC invariant
Sinon variant

Invariance Temporelle des SC

Un système à temps continu est temporellement invariant (TI) ssi pour un décalage en temps du signal d'entrée lui correspond le même décalage (identique) du signal de sortie:

- En d'autres termes, SC avec $x(t) \rightarrow y(t)$ est TI ssi:

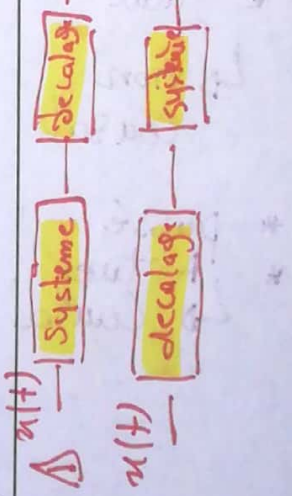
$x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$

- **Exercice:**

Discuter l'invariance temporelle des SC suivants:

S_1: $y(t) = \sin(x(t))$ ⟶ Système invariant

S_2: $y(t) = t \sin(x(t))$ ⟶ Variant



Scanned by CamScanner

AM: Avec mémoire

SM. Sans mémoire

Systèmes Continus sans/avec Mémoire

- Un système continu est dit sans mémoire (instantané statique) si sa sortie $y(t)$ à l'instant $t = t_0$ dépend seulement des valeurs de l'entrée appliquées au même instant $t = t_0$
- Un système continu est dit avec mémoire (dynamique) si la réponse du système en $t = t_0$ dépend des valeurs de l'entrée $x(t)$ aux instants passés ou futur du temps $t = t_0$.

(Actuel)
* A l'instant de l'entrée
↳ Sans mémoire
* futur ou passé % à l'entrée
↳ avec mémoire

- **Exercice:**

Montrer que le système S_1 est sans mémoire et que les systèmes S_2 et S_3 sont avec mémoire:

S_1: $y(t) = \sin(x(t)) + 2$ ⟶ SM
S_2: $y(t) = x(t-5)$ ⟶ AM
S_3: $y(t) = x(2t)$ ⟶ AM

Ex $y(t) = (t+1)\,x(t-1)$

⚠ On s'interesse uniquement à l'intervalle de $x(-)$

Causalité des SC

- Un système continu est causal si la sortie $y(t)$ à l'instant $t = t_0$ dépend seulement de l'entrée en $t \leq t_0$

* futur
↳ non causal
* passé
* Actuel
↳ Causal

- **Remarque:**
  - Tous les systèmes qui violent la condition de causalité sont dits non causaux ou anticipatifs
  - Tous les systèmes sans mémoires sont des systèmes causaux.

- **Exercice:**

Discuter la causalité des SC des systèmes continus S_1 et S_2 suivants:

S_1: $y(t) = x(t-2)$ ⟶ Causal
S_2: $y(t) = \sin(x(t+5))$ ⟶ non causal

Scanned by CamScanner

$y(t) = 3x(t) - 2x(t-1)$: Le système T_1.

$y(t) = 3x(t) + 1$ Le système T_2.

* Est ce que T_1 est linéaire ?



On pose $x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$

$x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$

$$T_1[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = 3[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] - 2[\alpha x_1(t-1) + \beta x_2(t-1)].$$

$$= 3\alpha x_1(t) - 2\beta x_2(t-1) + 3\beta x_2(t) - 2\beta x_2(t-1) - 2\alpha x_1(t-1)$$

$$= \alpha(3x_1(t) - 2x_1(t-1)) + \beta(3x_2(t) - 2x_2(t-1))$$

$$= \alpha y_1(t) + \beta y_2(t).$$

$\Rightarrow$ Le système T_1 est linéaire.

* Est ce que T_2 est linéaire ?

$$[T_2(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))] = 3(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) + 1$$

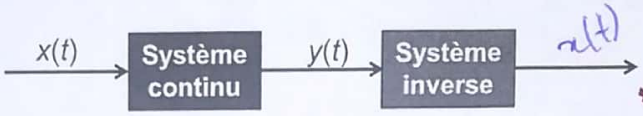
$$\neq \alpha y_1(t) + \beta y_2(t).$$

$\Rightarrow$ Le système n'est pas linéaire

Scanned by CamScanner

Inversibilité des SC

- Un système continu est **inversible** si le signal d'entrée $x(t)$ peut être uniquement déterminé à partir de la sortie $y(t)$ produite par $x(t)$.



- **Exercice:**

Discuter l'inversibilité des SC des systèmes continus $\mathbf{S_1}$ et $\mathbf{S_2}$ suivants:

$\mathbf{S_1}$: $y(t) = 3x(t) + 2$ ⟶ inversible

$\mathbf{S_2}$: $y(t) = \cos(x(t))$ ⟶ non inversible

Stabilité des SC

- Un système continu est dit borné en amplitude si:

$|x(t)| \leq B_x < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}$ où B_x est un nombre fini.

- Un système continu est dit stable si pour une entrée x(t) bornée en amplitude lui correspond une sortie bornée en amplitude aussi.

C'est le critère de stabilité au sens BIBO (Bounded Input Bounded Output)

$|x(t)| \leq B_x < \infty$ alors $|y(t)| \leq B < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

- **Exercice:**

Discuter la stabilité du SC $\mathbf{S_1}$ suivant:

$\mathbf{S_1}$: $y(t) = 20x(t) + 5$

Scanned by CamScanner

Autres propriétés des SC

- Un système continu **monovariable** et **multivariable**:

  Un système est monovariable (S.I.S.O.) si il possède une seule entrée et une seule sortie et multivariable dans le cas contraire (M.I.M.O., M.I.S.O, S.I.M.O).

- Un système continu **déterministe** et **stochastique**:

  Un système est déterministe si pour chaque excitation ne correspond qu'une seule réponse et stochastique si plusieurs réponses existent.

Analyse temporelle des SLTIC

- **Produit de convolution**

  Un Système Linéaire Temporellement Invariant et Causal (SLTIC) est défini par sa réponse impulsionnelle $h(t)$:

  $\delta(t) \rightarrow h(t)$ $\quad \delta(t) \rightarrow$ Système linéaire $\rightarrow h(t)$

  La réponse de ce SLTIC à une entrée $x(t)$ est un signal $y(t)$ résultant du produit de convolution de $x(t)$ et $h(t)$ donnée par la formule suivante:

$$y(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

  Parce que le SLTIC , Il satisfait aux propriétés de la linéarité et l'invariance temporelle. Nous pouvons alors déduire que:

  où a et t_0 sont des constantes arbitraires

Scanned by CamScanner

Convolution: Méthode de calcul

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau)\,d\tau$$

1. La RI $h(\tau)$ est inversée temporellement pour former $h(-\tau)$ et puis décalée par t pour obtenir $h(t-\tau)= h[-(\tau-t)]$ qui est une fonction de τ avec le paramètre t.
2. Les signaux $x(\tau)$ et $h(t-\tau)$ sont multipliés ensemble pour toutes les valeurs de τ avec un t fixé à une certaine valeur.
3. Le produit $x(\tau)$ $h(t-\tau)$ est intégré pour toutes les valeurs de τ une seule valeur de sortie $y(t)$.
4. Les étapes 1 à 3 sont répétées pour toutes les valeurs de $-\infty<t<+\infty$ pour produire la sortie globale $y(t)$.

Propriétés du produit de convolution

Commutativité:

L'ordre de l'opération de la convolution n'affecte pas le résultat de la convolution

Distributivité :

La convolution est une opération linéaire

Associativité :

Le changement de l'ordre de l'opérateur de la convolution n'affecte pas le résultat global de la convolution

Scanned by CamScanner

Propriétés du produit de convolution

Décalage:

où T_1 et T_2 sont deux constantes réelles arbitraires

Le décalage obtenu par la convolution correspond au cumul des décalages des signaux à convoluer

Durée de la convolution: :

Si les largeurs des signaux à convoluer $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont respectivement T_1 et T_2, alors la largeur de la convolution $x_1(t)*x_2(t)$ sera égal à .....

Convolution avec la fonction impulsion:

La convolution d'un signal avec la fonction impulsion dont l'origine est en t_0 décale le signal à l'origine de la fonction impulsion.

Analyse temporelle des SLTIC: Propriétés

Avec/sans mémoire:

Un SLTIC sera sans mémoire ssi sa réponse impulsionnelle:

Causalité:

Un SLTIC sera causal ssi :

Stabilité:

Si la réponse impulsionnelle h(t) d'un SLTIC satisfait la condition:

le SLTIC sera BIBO stable.

Inversibilité:

Un SLTIC de RI $h(t)$ est inversible ssi il existe un autre système de RI $h_i(t)$ qui satisfait le propriété:

Scanned by CamScanner

Relation entre convolution et corrélation

L'intercorrélation s'ecrit sous la forme: $C_{xy}(\tau) = \langle x, y_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).y^*(t-\tau)\,dt$

Remplaçant la variable muette *'t'* par *'u'* et exprimant l'intercorrélation par un retard t :

$$C_{xy}(t) = \langle x, y_t \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u).y^*(u-t)\,du$$

La convolution entre x et y s'écrit quant-à-elle:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u).y(t-u)\,du$$

On voit bien que la corrélation n'est autre qu'une convolution dans la qu'elle y(t) a été « retourné dans le temps puis conjugué »

Si on pose $y^{(-)}(t) \equiv y(-t)$

Scanned by CamScanner

Cours Théorie et Traitement du Signal

1ère année GT-GEC

Chapitre III: Analyse Fréquentielle

Groupe Pédagogique en Traitement du Signal

Année Universitaire : 2019-2020
Ecole Nationale d'Electronique et de Télécommunication de Sfax

1

Plan du chapitre

- Décomposition en série de Fourier des signaux périodiques
- Transformée de Fourier des signaux à énergie finie
- Réponse en Fréquence d'un SLIT
- Théorème de PLANCHEREL-PARSEVAL

2

Scanned by CamScanner

Un peu d'histoire !



- C'est le problème de la propagation de la chaleur qui a été à l'origine des séries de Fourier. Son idée était de décomposer un signal périodique quelconque en une somme de signaux périodiques connus et simples à étudier.
- En 1822, Jean Baptiste Joseph Fourier a montré qu'on peut exprimer n'importe quelle fonction périodique de période $T_0=1/f_0$ sous forme trigonométrique d'une somme pondérée de cosinus et de sinus

$$s(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t)+\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t)$$

Où a_0, a_n et b_n des coefficients propres à la fonction s(t) et f_0 est la fréquence fondamentale.

3

Décomposition en série de Fourier des signaux périodiques

- Calcul des coefficients de Fourier :

  En calculant les coefficients de la décomposition d'un signal dans la base trigonométrique, on obtient les coefficients de Fourier :

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} s(t)\,dt$$

$$a_n=\frac{2}{T_0}\int_{T_0} s(t)\cos(2\pi n f_0 t)\,dt$$

$$b_n=\frac{2}{T_0}\int_{T_0} s(t)\sin(2\pi n f_0 t)\,dt$$

Remarque : la composante $\frac{a_0}{2}$ est appelée valeur moyenne ou composante continue (DC) du signal.

4

Scanned by CamScanner

Décomposition en série de Fourier des signaux périodiques

- Propriétés :
  - Cas d'un signal pair : $s(-t)=s(t)$

    Le sinus étant impair, soit $\sin(-x)=-\sin(x)$

    d'où

    $b_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} s(t)\sin(2\pi n f_0 t)\,dt = 0$

    ⟹ On calcule uniquement $\frac{a_0}{2}$ et a_n pour un signal pair

  - Cas d'un signal impair: $s(-t)=-s(t)$

    Le cosinus étant pair, soit $\cos(-x)=\cos(x)$

    d'où

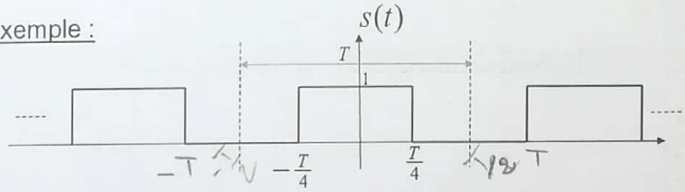
    $a_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} s(t)\cos(2\pi n f_0 t)\,dt = 0$

    ⟹ On calcule uniquement b_n pour un signal impair

5

Décomposition en série de Fourier des signaux périodiques

- Exemple :



Calculer les coefficients de Fourier de ce signal

$s(t)$ est pair $\Rightarrow b_n = 0$

$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} 1\,dt \quad (T_0 = T)$

$= \frac{1}{T}\,\frac{T}{2} = \frac{1}{2}$

$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} 1\cdot\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt = \frac{2}{T}\left[\frac{T}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}$

$= \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$

$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \qquad a_n = \mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \quad \forall n \geq 1$

6

Scanned by CamScanner

Décomposition en série de Fourier des signaux périodiques

- Décomposition en harmoniques ou forme polaire :

En utilisant la relation trigonométrique :

$$a\cos(x)+b\sin(x)=r\cos(x+\varphi)$$

Où $r=\sqrt{a^2+b^2}$ $\varphi=\arctan\left(\frac{-b}{a}\right)$

On peut réecrire la décomposition en série de Fourier

$$s(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos(2\pi nf_0t)+b_n\sin(2\pi nf_0t)]$$

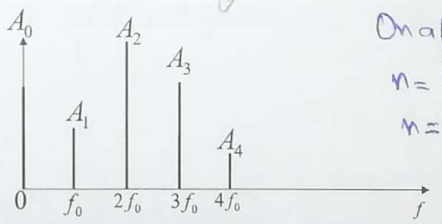
sous la forme d'une somme de cosinus

$$s(t)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}[A_n\cos(2\pi nf_0t+\varphi_0)]$$

Avec $A_0=\frac{a_0}{2}$, $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ $\varphi_n=\text{arctg}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$

Décomposition en série de Fourier des signaux périodiques

- Spectre unilatéral



On appelle A_0 la valeur de
$n=1$: 1ère harmonique
$n=2$: 2ème "

- La décomposition en harmoniques permet d'associer au signal une représentation dans le plan de fréquence, dite représentation spectrale
- Le spectre est une succession de pics d'amplitude A_k placés aux fréquences kf_0 : c'est un spectre de raies

8

Scanned by CamScanner

Décomposition en série de Fourier des signaux périodiques

- Décomposition en série de Fourier complexe :

En utilisant les formules d'Euler,

$$\cos(x)=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2} \qquad \sin(x)=\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$$

On peut réécrire la décomposition trigonométrique de s(t) sous la forme :

$$s(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(2\pi nf_0t)+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin(2\pi nf_0t)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\left(\frac{e^{j2\pi nf_0t}+e^{-j2\pi nf_0t}}{2}\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\left(\frac{e^{j2\pi nf_0t}-e^{-j2\pi nf_0t}}{2j}\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-jb_n)e^{j2\pi nf_0t}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+jb_n)e^{-j2\pi nf_0t}$$

$$=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-jb_n)e^{j2\pi nf_0t}+\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}(a_{-n}+jb_{-n})e^{j2\pi nf_0t}$$

9

Décomposition en série de Fourier des signaux périodiques

- Forme complexe et relation avec la forme trigonométrique :

Un signal s(t) peut être décomposé sous forme de série de Fourier complexe par

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}S_n e^{j2\pi kf_0t}$$

Avec

$$S_0=\frac{a_0}{2}$$

$$S_n=\frac{a_n-jb_n}{2}$$

$$S_{-n}=\frac{a_n+jb_n}{2} \quad n\geq 1$$

10

Scanned by CamScanner

Décomposition en série de Fourier des signaux périodiques

- Calcul direct des coefficients complexes de Fourier :

  La base exponentielle complexe étant également une base orthogonale de l'espace des signaux périodiques, on peut calculer les coefficients en calculant le produit scalaire du signal avec les fonctions $e^{j2\pi kf_0 t}$

$$S_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} s(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt$$

  pour tout entier relatif *n*.

  avec T_0 la période fondamentale du signal s(t).

11

Décomposition en série de Fourier des signaux périodiques

- Egalité de Parseval :

  La puissance moyenne d'un signal périodique peut être calculée à partir de ses coefficients de Fourier par

$$P_s = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |s(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |S_n|^2$$

- Spectres bilatéraux :

  On peut associer à la décomposition en série de Fourier complexe une représentation spectrale de raies discontinues.

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n\, \delta(f - n f_0)$$

  S_n étant complexe, on a $S_n = |S_n| e^{j\arg(S_n)}$

$$|S_n| = \tfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \tfrac{1}{2} A_n \qquad \arg(S_n) = \angle S_n = -\angle S_{-n}$$

Spectre d'amplitude bilatéral (pair) — spectre de phase bilatéral (impair)

12

Scanned by CamScanner

Décomposition en série de Fourier des signaux périodiques

- Exercice :

  - En reprenant l'exemple précédent, calculer les coefficients complexes de Fourier par deux méthodes différentes (calcul direct et relation avec la forme trigonométrique)

  - Tracer le spectre d'amplitude du signal pour $|n| \leq 3$

$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$

$a_n = \text{Min}_c\left(\frac{n}{2}\right)$

(1M) $S_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$

$S_n = \frac{a_n}{2} = \frac{1}{2}\text{Min}_c\left(\frac{n}{2}\right)$

$S_n = \frac{a_n}{2} = \frac{1}{2}\text{Min}_c\left(\frac{n}{2}\right)$

(2M) calcul direct

Si $n=0$; $S_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} s(t)\,dt = \frac{1}{2}$

Si $n \neq 0$; $S_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}\,dt$

$= \frac{1}{T}\left[\frac{e^{-j\frac{2\pi nt}{T}}}{-j\frac{2\pi n}{T}}\right]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}$

$= \frac{1}{-j2\pi n}\left(e^{-j\frac{\pi n}{2}} - e^{j\frac{\pi n}{2}}\right)$

$S_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n} = \frac{1}{2}\text{Min}_c\left(\frac{n}{2}\right)$

(voir suite)

Transformée de Fourier

- <u>Des signaux périodiques vers les signaux non périodiques</u>:

  Un signal non périodique peut être considéré comme un signal périodique de période infinie :

  $$s(t) = s(t+T_0) \text{ avec } T_0 \to +\infty$$

  Ainsi, la fréquence

  $$f_0 = \frac{1}{T_0} \to 0^+$$

  On rappelle que le spectre d'un signal périodique est un spectre de raies discontinu séparées au moins de f_0 sur l'axe de fréquence.

  Si $f_0 \to 0^+$, l'écart entre les raies consécutives devient infiniment petit et on obtient un spectre continu.

  $$\lim_{T_0 \to +\infty} nf_0 = \lim_{f_0 \to 0^+} nf_0 = f$$

  où f variable continue de la fréquence.

14

Scanned by CamScanner

Transformée de Fourier

- Spectre d'un signal apériodique :

  Pour un signal périodique s(t), les coefficients de Fourier (forme complexe) sont calculés par la relation :

$$S_n T_0 = \int_{T_0} s(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

Lorsque $T_0 \to +\infty$, on a

$$\lim_{T_0 \to +\infty} S_n T_0 = \lim_{T_0 \to +\infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Cette fonctionnelle de s(t) permet de calculer le spectre d'un signal apériodique à chaque fréquence f : c'est la transformée de Fourier

15

Transformée de Fourier

- Définition:

Soit x(t) un signal déterministe, sa transformée de Fourier est une fonction, généralement complexe, de la variable réelle f définie par:

$$X(f) = F\{x(t)\} = \langle x(t), e^{-j2\pi f t} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

La transformée inverse existe, et elle est donnée par:

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = \langle x(t), e^{j2\pi f t} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

La symétrie des transformations directe et inverse montre une dualité entre l' espace temps et l' espace fréquence. Elle est indiquée par une flèche double:

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

16

Scanned by CamScanner

Transformée de Fourier

- Quelques Propriétés de la Transformée de Fourier (TF)

- Linéarité :

$$a\,x(t)+b\,y(t) \leftrightarrow a\,X(f)+b\,Y(f)$$

- Conjugué complexe:

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f)$$

- Dualité

$$\begin{cases} x(t) \leftrightarrow X(f) \\ X(t) \leftrightarrow x(-f) \end{cases}$$

- Dérivation :

$$\frac{d^n x}{dt^n} \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$$

- Décalage temporel :

$$x(t-t_0) \leftrightarrow X(f)\,e^{-j2\pi f t_0}$$

- Modulation :

$$x(t)\,e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f-f_0)$$

- Changement d'échelle

$$x(at) \leftrightarrow |a|^{-1} X(fa^{-1})$$

17

Transformée de Fourier

- Transformée de Fourier d'un signal réel à énergie finie:

Définition:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j2\pi ft}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\cos(2\pi ft)dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\sin(2\pi ft)dt \\ &= X_p(f)+X_i(f) \\ &= \mathrm{Re}\{X(f)\}+j\,\mathrm{Im}\{X(f)\} \\ &= |X(f)|\;e^{j\theta_x(f)} \end{aligned}$$

Le module $|X(f)|$ est une fct paire appelée spectre d'amplitude et l'argument $\theta_x(f)=\arg X(f)$ est une fonction impaire appelée spectre de phase du signal

18

$$v_x(f) = \arg\left(\frac{c}{a+jb}\right) = \arg(c) - \arg(a+jb) = -\arg\left(\frac{b}{a}\right)$$

Scanned by CamScanner

Transformée de Fourier

Exercice 1: Déterminer la transformée de Fourier (TF) du signal suivant:

$$s(t) = rect_T(t) = \begin{cases} 1 & pour\ t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & autrement \end{cases}$$

2) Calculer $s(t+1)$, $s(\frac{t}{2})$, $s(t)e^{j2\pi t}$, $sinc(t)$

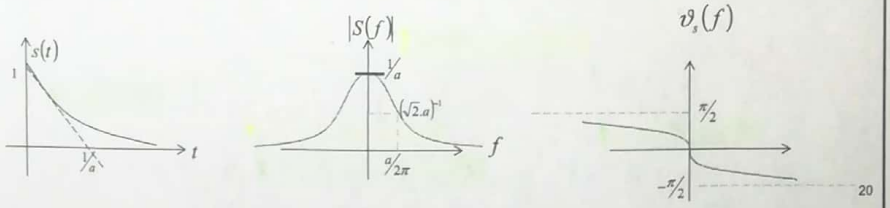
19

Transformée de Fourier des signaux à énergie finie

- **Exercice 2:** Signal à décroissance exponentielle

  Soit $s(t) = e^{-at}.E(t)$

  Sa TF vaut:



20

Scanned by CamScanner

TF de quelques signaux élémentaires et conséquences

•Impulsion de DIRAC

On a: $TF[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).e^{-j2\pi ft}dt = e^{-j2\pi 0t} = 1$

$\delta(t) \leftrightarrow 1$

•Impulsion retardée:

Par simple application de la propriété: *décalage temporel*

$\delta(t-\tau) \leftrightarrow e^{-j2\pi f\tau}$

•Signal continu:

On cherche la TF d'un signal continu au sens électronique et non pas mathématique et en utilisant la propriété de la dualité:

$TF(1) = \delta(-f) = \delta(f)$

Scanned by CamScanner

TF de quelques signaux élémentaires et conséquences

•Fonctions trigonométriques

D'après la formule d'EULER:

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

Il vient alors :

$\cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0))$ | $\sin(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2j}(\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0))$

•Fonction signe

$$sgn(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$$

•Fonction échelon

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

23

Réponse en Fréquence d'un SLIT

Considérons un SLIT de réponse impulsionnelle *h(t)* et d'entrée *x(t)*

$$x(t) = X_0 e^{j2\pi f_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

La sortie est donnée par: $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau).\, X_0 e^{j2\pi f_0 (t-\tau)} d\tau$

$$y(t) = X_0 e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau).\, e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau$$

On reconnait là, l'expression de la TF de $h(\tau)$: gain complexe ou la fonction de transfert *H(f) du système d'où:*

$$H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau$$

La sortie s'écrit tout simplement: $y(t) = X_0 e^{j2\pi f_0 t} H(f_0)$

$H(f_0)$ est la... réponse propre du S.L.I.T à la fréquence d'excitation f_0

24

Scanned by CamScanner

Réponse en Fréquence d'un SLIT

Considérons maintenant un signal x(t) quelconque. On peut exprimer x(t) sous forme d'une somme infinie d'exponentielles complexes.
Il s'agit tout simplement de la TF inverse:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f).e^{j2\pi f t} df$$

A chacun des composants $X(f).e^{j2\pi f t}$ correspond la sortie $X(f).H(f).e^{j2\pi f t}$

Par principe de superposition: $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f).H(f).e^{j2\pi f t} df$

On déduit que la TF de la sortie $y(t)$ vaut: $Y(f) = H(f).X(f)$

25

Théorème de PLANCHEREL

La description temporelle, en terme de produit de convolution, se transforme en produit simple dans le domaine fréquentiel

$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f).Y(f)$

On vérifie facilement que réciproquement, on a :

$x(t).y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$

Conséquence I:

$x(t).y^*(t) \leftrightarrow \int X(u).Y^*(u-f)du$ Car $y^*(t) \leftrightarrow Y^*(-f)$

On en déduit que $\int x(t).y^*(t).e^{-j2\pi ft} dt = \int X(u).Y^*(u-f)du$

Si on pose $f = 0$, on aura: $\int x(t).y^*(t)\,dt = \int X(u)Y^*(u)\,du$

Cette relation indique que les produits scalaires se conservent dans les différentes représentations des signaux

C'est la relation de **PLANCHEREL-PARSEVAL**

26

Scanned by CamScanner

Conséquence II:

On reprend l'égalité précédente: $\int x(t).y^*(t)dt = \int X(u).Y^*(u)du$

Si on pose $y(t) = x(t)$, on aura: $W = \int x(t).x^*(t)dt = \int X(u).X^*(u)du$

$$\int |x(t)|^2 dt = \int |X(u)|^2 du$$

Cette relation indique la conservation d'énergie dans les différentes bases de représentation des signaux;

c'est le **théorème de PARSEVAL**

27

Analyse temps-fréquence

- Transformée de Fourier à court-terme

La transformée de Fourier permet d'analyser le contenu fréquentiel d'un signal à condition que ce contenu soit invariant au cours du temps. Dans le cas où l'on souhaite tracer l'évolution du contenu fréquentiel d'un signal nous devons avoir recours à une fonction de fenêtrage w_τ *à support fini à laquelle nous appliquerons différents retard* τ. *Il semble* évident que cette fenêtre introduira des artefacts spécifiques dans le domaine spectral

$$X(f, w_\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).w(t-\tau).e^{-j2\pi ft}dt$$

28

Scanned by CamScanner

Analyse temps-fréquence

- Fonction d'ambiguïté

Elle permet l'étude des signaux ayant subi un décalage temporel $x(t-\tau)$ et fréquentiel $x^*(t).e^{-j2\pi f t}$.
On mesure la distance euclidienne entraînée par un décalage temporel τ et un décalage fréquentiel f.
Elle s'emploie principalement dans le traitement de signaux radar ou de type Doppler. En effet, elle permet de localiser des cibles dans le plan temps-fréquence.

$$X(\tau, f) = \int x(t-\tau).x^*(t).e^{-j2\pi f t}dt$$

29

Scanned by CamScanner

Cours Théorie et Traitement du Signal

1ère année GT-GEC

Chapitre IV: Spectre d'Energie et de Puissance

Groupe Pédagogique en Traitement du Signal

Année Universitaire : 2019-2019

Ecole nationale d'Electronique et des Télécommunications de Sfax

1

Plan du chapitre

- Densité spectrale d'énergie
- Densité inter-spectrale d'énergie
- Densité spectral de puissance
- Densité inter-spectrale de puissance
- Cas particulier des signaux périodiques

2

Densité spectrale d'énergie

Soit $\Phi_x(f)$ la TF de la fonction d'auto-corrélation d'un signal réel ou complexe, à énergie finie x(t)

$$\Phi_x(f) = F\{\varphi_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

On a montré que: $\varphi_x(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau)$

Par conséquent $\Phi_x(f) = F\{x(\tau) * x^*(-\tau)\} = F\{x(\tau)\} \cdot F\{x^*(-\tau)\}$

D'après les propriétés de la TF: $F\{x^*(-\tau)\} = X^*(f)$

On obtient alors: $\Phi_x(f) = X(f)X^*(f) = |X(f)|^2$

3

Densité spectrale d'énergie

L'expression de la TF inverse de $\Phi_x(f)$

$$\varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) e^{+j2\pi f\tau} df$$

Si on pose $\tau = 0$ on obtient l'égalité de Parseval pour les signaux à énergie finie:

$$W_x = \varphi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

L'énergie total W_x du signal peut donc se calculer soit en intégrant sa distribution temporelle $|x(t)|^2$ soit en intégrant sa distribution fréquentielle $\Phi_x(f)$.

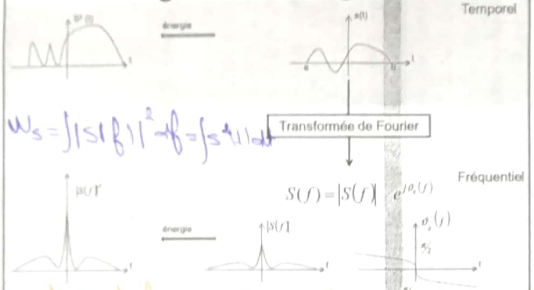
Pour cette raison, $\Phi_x(f)$ est appelée la densité spectrale d'énergie ... ou parfois plus simple spectre d'énergie du signal x(t)

4

Scanned by CamScanner

Signaux à Energie Finie

Temporel



Transformée de Fourier

Fréquentiel

densité spectrale d'énergie — spectre d'amplitude — spectre de phase

Densité spectrale d'énergie

- Exemple:

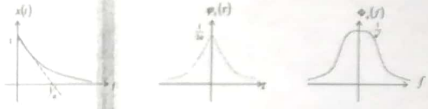
Soit $x(t) = e^{-at}.E(t)$

Sa fonction d'auto-corrélation vaut: $\varphi_x(\tau) = \frac{1}{2a} e^{-a|\tau|}$

Sa densité spectrale d'énergie du signal est :

$$\Phi_x(f) = F\{\varphi_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \frac{1}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

On vérifie bien qu'elle est égale au carré du spectre d'amplitude de x(t)



Densité inter-spectrale d'énergie

- Densité interspectrale d'énergie:

•**Définition** : La T.F de la fct d'inter-corrélation de deux signaux à énergie finie est appelée densité inter-spectrale ou bien densité spectrale mutuelle, croisée ou d'interaction.

•Elle caractérise la contribution énergétique des différentes composantes fréquentielles.

•La densité inter-spectrale est généralement une fonction complexe et non symétrique:

$$\Phi_{xy}(f) = F\{\varphi_{xy}(\tau)\} = X(f)\,Y^*(f)$$

$$\Phi_{xy}(f) = \Phi^*_{yx}(f)$$

Signaux à puissance moyenne finie

- Rappel : signal à puissance moyenne finie

Un signal $x(t)$ est dit à puissance moyenne finie si sa puissance moyenne

$$P_S = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

a une valeur finie non nulle

Ces signaux sont physiquement irréalisable, mais représentent un intérêt pour la modélisation de certains signaux.

- Exemple :

- La fonction échelon est un signal à puissance moyenne finie
- Tous les signaux périodiques sont des signaux à puissance moyenne finie

Scanned by CamScanner

Corrélation des signaux à puissance moyenne finie

- Fonction d'inter-corrélation :
  - Le produit scalaire qui définit l'inter-corrélation des signaux à énergie finie n'est pas applicable dans le cas de signaux à puissance moyenne finie non nulle.
  - On définit l'inter-corrélation de deux signaux à puissance moyenne finie par

$$\varphi_{xy}(\tau) = \langle x, y_\tau \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, y^*(t-\tau)\, dt$$

C'est aussi une mesure de similitude de forme et de position des signaux.

- Fonction d'auto-corrélation : si $x(t) = y(t)$, on obtient

$$\varphi_x(\tau) = \langle x, x_\tau \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$

9

Corrélation des signaux à puissance moyenne finie

- Propriétés :
  - $\varphi_{xy}(\tau) = \varphi^*_{yx}(-\tau)$ Symétrie Hermitienne
  - $\varphi_x(\tau) = \varphi^*_x(-\tau)$ En particulier, si $x(t)$ est un signal réel alors la fonction d'autocorrélation $\varphi_x(\tau)$ est paire
  - Pour $\tau = 0$, l'autocorrélation est maximale et égale à la puissance moyenne du signal

$$|\varphi_x(\tau)| \leq \varphi_x(0) = P_x$$

-

$$|\varphi_{xy}(\tau)| \leq \varphi_x(0)\,\varphi_y(0)$$

10

Densité spectrale de puissance

- Définition

Soit x(t) un signal réel ou complexe à puissance moyenne finie et $\varphi_x(\tau)$ sa fonction d'auto-corrélation. On appelle densité spectrale de puissance la T.F de $\varphi_x(\tau)$

$$\Phi_x(f) = \mathcal{F}\{\varphi_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

La transformée de Fourier inverse donne

$$\varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f)\, e^{+j2\pi f\tau}\, df$$

On obtient ainsi pour $\tau = 0$ l'identité de Parseval pour les signaux à puissance moyenne finie.

11

Densité spectrale de puissance

- Identité de parseval :

Pour un signal x(t) à puissance moyenne finie, on a

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f)\, df$$

d'où le nom de densité spectrale de puissance.

Remarques :

- Si $x(t)$ est un signal réel, alors son autocorrélation $\varphi_x(\tau)$ et sa densité spectrale de puissance $\Phi_x(f)$ sont des fonctions réelles et paires
- Contrairement aux signaux à énergie finie, on a

$$\Phi_x(f) \neq |X(f)|^2$$

12

Scanned by CamScanner

Densité spectrale de puissance

- Soit x(t) un signal à puissance moyenne finie et $x_T(t) = x(t).rect\left(\frac{t}{T}\right)$
  On a $x_T(t)$ un signal à énergie finie avec $\lim_{T\to+\infty} x_T(t) = x(t)$

  Si on note $X(f,T)$ la transformée de Fourier de $x_T(t)$, alors on peut écrire

$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} |x_T(t)|^2 dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f,T)|^2 df$$

  Si cette limite existe, et en utilisant l'égalité de parseval, on peut écrire la densité spectrale de x(t) sous la forme

$$\Phi_x(f) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}|X(f,T)|^2$$

13

Densité interspectrale de puissance

- Définition :

  La Tf de la fonction d'intercorrélation de deux signaux à puissance moyenne finie est appelée densité interspectrale de puissance ou bien densité spectrale de puissance mutuelle.

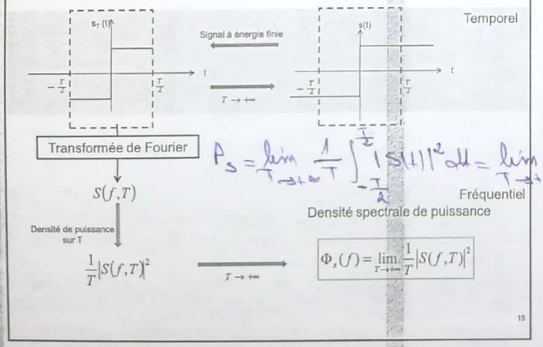
$$\Phi_{xy}(f) = F\{\varphi_{xy}(\tau)\}$$

  La densité interspectrale est généralement une fonction complexe et non symétrique:

$$\Phi_{xy}(f) = \Phi^*_{yx}(f)$$

14

Signaux à Puissance moyenne finie



$$P_x = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |S(t)|^2 dt = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |S(f,t)| df$$

15

Cas particulier des signaux périodiques

- Rappel : décomposition de Fourier d'un signal périodique

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}}$$

  où T est la période du signal.
  Le spectre du signal s'écrit $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$

- Fonction d'intercorrélation des signaux périodiques
  Soient deux signaux x(t) et y(t) périodiques de même période T.
  La fonction d'intercorrélation est calculée sur une période par

$$\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, y^*(t-\tau)\, dt$$

- Remarque: Les fonctions d'inter- et d'auto-corrélation de signaux périodiques de période T sont aussi des fcts périodiques de m. période T

$$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 e^{j\frac{2\pi nt}{T}}$$

16

Scanned by CamScanner

Cas particulier des signaux périodiques

- Fonction d'autocorrélation des signaux périodiques

Si x(t) et y(t) sont identiques, on a

$$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$

En utilisant le développement en série de Fourier de x(t) et y(t), on peut écrire

$$\varphi_{xy}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n Y_n^* e^{j\frac{2\pi n\tau}{T}}$$

et en particulier

$$\varphi_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n X_n^* e^{j\frac{2\pi n\tau}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 e^{j\frac{2\pi n\tau}{T}}$$

En remplaçant $\tau = 0$, on retrouve l'égalité de Parseval.

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2$$

17

Cas particulier des signaux périodiques

- Densité spectrale de puissance :

La densité spectrale d'un signal périodique x(t) est égale à

$$\Phi_x(f) = \mathcal{F}\{\varphi_x(\tau)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2\, \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

- Densité inter-spectrale de puissance :

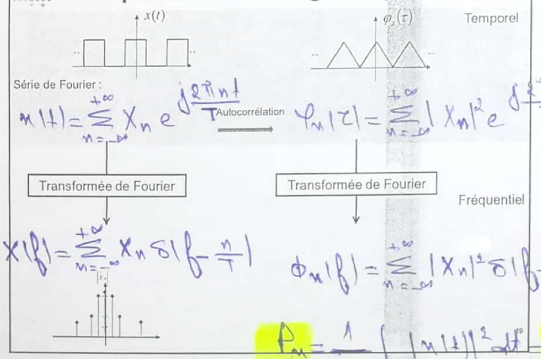
La densité interspectrale de puissance de deux signaux périodiques de même période x(t) et y(t) est égale à

$$\Phi_{xy}(f) = \mathcal{F}\{\varphi_{xy}(\tau)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n Y_n^*\, \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

- Exercice : calculer la fonction d'autocorrélation, la DSP et la puissance du signal $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t - \alpha)$

18

Cas particulier des signaux périodiques



FIN

20

Scanned by CamScanner

Cours Théorie et Traitement du Signal

1ère année GT-GEC

Chapitre V: Numérisation des signaux

Groupe Pédagogique en Traitement du Signal

Année Universitaire : 2019-2020
Ecole Nationale d'Electronique et de Télécommunications de Sfax

Sommaire

Rappel Mathématique
Motivation et définition
Échantillonneur Idéal Théorique
Analyse fréquentielle de l'échantillonnage
Théorème d'échantillonnage (SHANNON 1948)
Rétablissement d'un signal échantillonné
Échantillonnage Réel
Quantification
codage

$x(t)\cdot\delta(t) = x(t_0)\cdot\delta(t) \Rightarrow x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$

$x(t) * \delta(t) = x(t) \Rightarrow x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

Rappel Mathématique

Identité

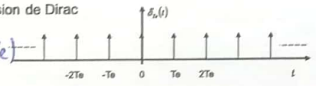
$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\,\delta(t-\lambda)\,d\lambda = x(t)$$

Translation

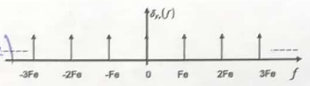
$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

Suite périodique d'impulsion de Dirac

$$\delta_{Te}(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta(t - KTe)$$



$$\delta_{Fe}(f) = Fe \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta(f - KFe)$$



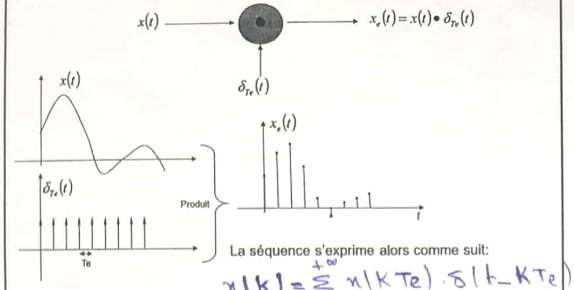
Motivation et définition

- Si on veut traiter un signal par voie numérique, il faut le représenter au préalable par une suite de valeur ponctuelle prélevée régulièrement. Un tel prélèvement est appelé échantillonnage.
- L'intervalle entre deux échantillons successifs est appelé pas d'échantillonnage
- La représentation numérique des échantillons requiert une opération complémentaire de quantification et de codage.
- L'ensemble réalise une fonction de conversion analogique - numérique (A/N)



Scanned by CamScanner

Échantillonneur Idéal Théorique



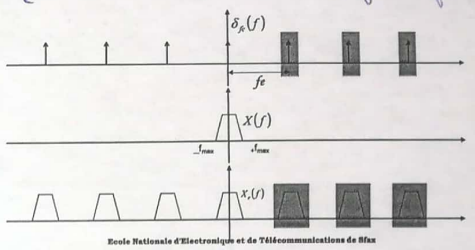
La séquence s'exprime alors comme suit:

$$x[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kTe).\delta(t-kTe)$$

Analyse fréquentielle de l'échantillonnage

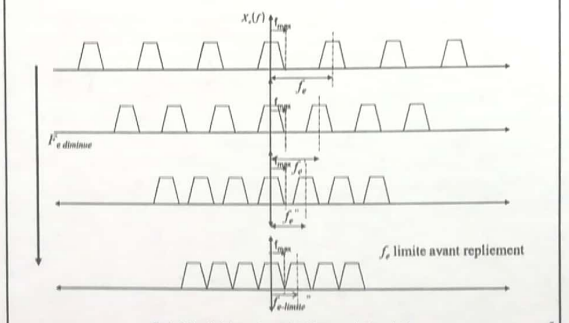
- D'après le théorème de PLANCHEREL :

$$x_e(k) = x(t).\delta_{Te}(t) \xrightarrow{TF} X_e(f) = X(f) * \delta_{fe}(f)$$



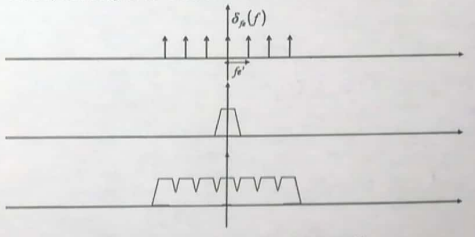
$$(x(t).\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kTe) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(kTe)\,\delta(t-kTe)$$

Effet de f_e sur le spectre échantillonné



Théorème d'échantillonnage et conséquence

- Recouvrement spectral: Le spectre d'un signal échantillonné est une fonction périodique de cadence *fe*. On peut avoir un recouvrement spectral lorsque $fe < 2.f_{max}$. (on dit aussi repliement. En anglais *aliasing effect*). Par conséquent, la figure au-dessus devienne alors :

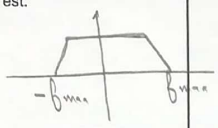


Scanned by CamScanner

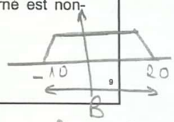
Théorème d'échantillonnage (SHANNON 1948)

- La condition de réversibilité pour un signal analogique de spectre passe-bas à support borné ayant une fréquence limite f_{max} et cadencé à une fréquence d'échantillonnage f_e est:

$$f_e = \frac{1}{T_e} \geq 2 f_{max}$$



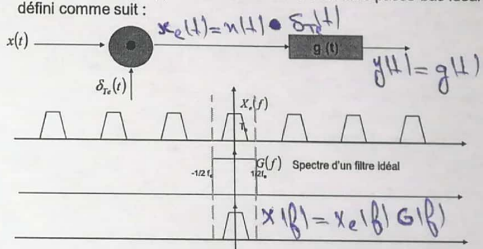
- Pour le cas contraire, le repliement entraîne la non réversibilité de la transformation d'échantillonnage. De même, il en résulte que l'échantillonnage d'un signal ayant un spectre non borné est non-réversible.



$f_e \geq B$

Rétablissement d'un signal échantillonné

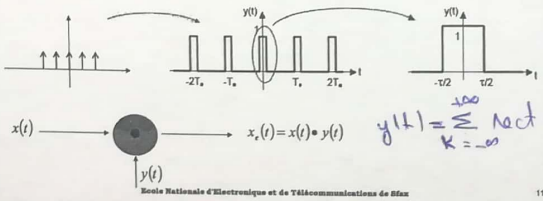
- Théoriquement, il est possible de recréer un signal échantillonné ayant un spectre *Xe(f)* en le filtrant à l'aide d'un filtre passe-bas idéal défini comme suit :



On peut montrer que la réponse impulsionnelle du filtre idéal *g(t)* est tout simplement le sinus cardinal.

Échantillonnage Réel

- En pratique, l'échantillonnage s'effectue en commandant un interrupteur par un train d'impulsions étroites. Il est donc impossible d'obtenir des échantillons de durée quasiment nulle.
- En fait, chaque impulsion va avoir une durée très courte τ .
- L'échantillonnage peut donc être modélisé par la multiplication du signal par une suite de fonction rectangle (ou porte) de largeur τ .



$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t - kT_e}{\tau}\right)$$

Échantillonnage Réel

- L'expression du signal d'échantillonnage devient donc :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t - kT_e}{\tau}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

$x(t) \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$

Et par conséquent, sa transformée de Fourier est égale à :

$$Y(f) = TF\left[\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)\right] f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kT_e)$$

Comme l'expression du signal échantillonné est :

$$x_e(t) = x(t) \cdot y(t)$$

Sa transformée de Fourier devienne :

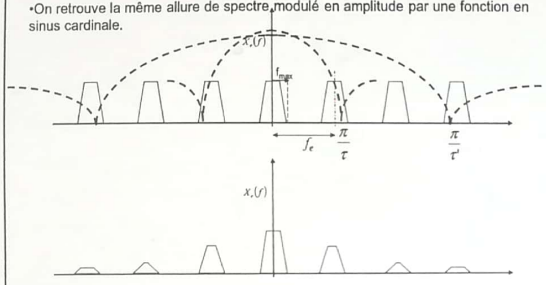
$$X_e(f) = X(f) * Y(f) = \frac{\tau}{T_e} \sum_{-\infty}^{+\infty} \text{Sinc}(\tau k f_e)\, X(f - k f_e)$$

$$= \tau \text{Sinc}(\tau f) f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k F_e) = \frac{\tau}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{Sinc}(\tau k f_e)\, \delta(f - kf$$

Scanned by CamScanner

Échantillonnage Réel

•On retrouve la même allure de spectre, modulé en amplitude par une fonction en sinus cardinale.



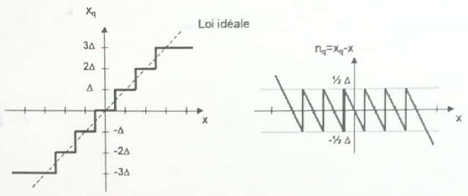
Quantification

Définition

1. La quantification consiste à associer à une valeur réelle x quelconque, une autre valeur x_q appartenant à un ensemble fini de valeurs et ce suivant une certaine loi : arrondi supérieur, arrondi inférieur, arrondi le plus proche, etc…
2. L'écart entre chaque valeur x_q est appelé *pas de quantification*.
3. Le fait d'arrondir la valeur de départ entraîne forcément une *erreur de quantification* que l'on appelle le *bruit de quantification*.

Quantification Uniforme

La loi de quantification uniforme utilise un pas de quantification (Δ) constant entre chaque valeur x_q.



Le bruit de quantification n_q est dans ce cas un signal aléatoire. Ces caractéristiques sont donc définies par ses propriétés statistiques.

Codage

Définition:

Le codage consiste à associer à un ensemble de valeurs discrètes un code composé d'éléments binaires.
Les codes les plus connus : code binaire naturel, code binaire décalé, code complément à 2, code DCB, code Gray.

Exemple sur 4 bits :

Nbre	Binaire	Binaire décalé	DCB	Gray	Complément à 2
-8	/	0000	/	/	1000
-3	/	0101	/	/	1101
0	0000	1000	0000	0000	0000
1	0001	0001	0001	0001	0001
5	0101	0101	0101	0111	0101
10	1010	/	0001 0000	1111	/
15	1111	/	0001 0101	1000	/

Scanned by CamScanner